Irina **CREȚU**

metode de rezolvare a problemelor de geometrie

Ediţia a II-a

Editura Paralela 45

Cuprins

capitolul Metode generale folosite în geometrie pentru rezolvarea problemelor

1. Metoda sintezei

Cuvântul *sinteză* vine din grecescul *synthesis*, care înseamnă strângerea într-un întreg a părţilor componente care au fost despărţite. În logică, sinteza este o metodă de raţionament care constă în faptul că desfăşurarea gândirii se face de la simplu la compus sau de la cunoscut la necunoscut. Demonstraţia în care se porneşte de la propoziţii particulare spre propoziţii generale se numeşte *demonstraţie sintetică* (*metodă inductivă* sau *prin sinteză*). În acest tip de demonstraţie se porneşte de la *cunoscut spre necunoscut*, adică pornind de la o propoziţie despre care ştim că este adevărată, deducem propoziţii care, de asemenea, sunt adevărate şi ultima este cea care trebuie demonstrată. Aşadar, în această metodă, *gândirea elevului este dirijată pentru a se răspunde la întrebarea: Dacă ştiu ..., ce pot să aflu?*

1.1. Metoda sintezei în rezolvarea problemelor de calcul

Prin probleme de calcul înţelegem acele probleme care cer găsirea unor valori numerice atunci când se cunosc anumite date. Dacă mărimile din problemă nu sunt exprimate prin numere, rezultatul obţinut se exprimă, în mod general, printr-o formulă. Problemele de calcul se împart în:

a) exerciţii şi probleme cu conţinut geometric, dar pentru rezolvarea cărora se cere cunoaşterea rezolvării problemelor tip din aritmetică;
b) probleme care, pentru a le găsi rezultatul, cer folosirea mai multor propoziţii legate într-un raţionament.

Rezolvarea exerciţiilor nu cere din partea celui ce le face un efort mare de gândire, construcţia unor raţionamente complicate, ci numai cunoaşterea temeinică a regulilor, a formulelor sau a teoremelor studiate. Deşi rezolvarea exerciţiilor dezvoltă prea puţin gândirea logică, ele au o importanţă mare pentru studiul geometriei deoarece, pe de o parte, contribuie la formarea priceperilor şi deprinderilor pentru a aplica cunoştinţele teoretice în rezolvarea problemelor, ceea ce constituie, de fapt, primul pas în aplicarea teoriei în practică, iar pe de altă parte, formează, încetul cu încetul, încrederea în forţele proprii.

Prin metoda sintezei o problemă de calcul se rezolvă astfel: se iau două date cunoscute ale problemei între care există o legătură şi cu ajutorul lor se formulează o problemă ce ne dă posibilitatea să calculăm valoarea celei de-a treia mărimi, care devine astfel cunoscută. Se iau apoi alte două date cunoscute (fie date prin enunțul problemei, fie calculate anterior) și cu ajutorul lor se formulează o problemă, care rezolvată ne dă valoarea unei alte mărimi. Se procedează în acest mod până găsim tocmai valorile mărimilor ce se cer în problemă.

Observăm că uneori ne putem folosi și de o singură dată a problemei, dacă ea este legată de o formulă cunoscută mai demult. Alteori putem lua, în loc de două date, mai multe date dacă între ele există o legătură în așa fel încât să putem formula cu ajutorul lor o problemă simplă.

În concluzie, această metodă se poate folosi cu succes la o problemă care necesită aplicarea directă a unei teoreme învățate sau când avem destule indicații care să ne conducă spre rezultatul cerut.

Aplicăm metoda sintezei în rezolvarea următoarelor probleme de calcul.

PROBLEMA 1

Se dă piramida *SABC*, în care baza este un triunghi isoscel având laturile $AB = AC = 82$ cm, $BC = 36$ cm, iar muchia *SA*, perpendiculară pe planul bazei, are o lungime de 20 cm. Prin vârful *A* se duce un plan care intersectează muchiile *SB* și *SC* în punctele *M* și *N*, care sunt, respectiv, mijloacele lor. Se cere să se afle:

1^0) aria totală a piramidei;
2^0) volumul piramidei;
3^0) aria secțiunii AMN;
4^0) tangenta unghiului pe care îl face fața *SBC* cu planul bazei.

SOLUȚIE

Construim figura, apoi ne fixăm atenția asupra primei întrebări. Deoarece aceasta cere să aflăm aria totală a piramidei (fig. 1), trebuie să găsim ariile tuturor fețelor, apoi să le adunăm.

1°) Trebuie să aflăm aria bazei cu datele 82 cm, 36 cm și vom formula o problemă prin rezolvarea căreia să calculăm înălțimea triunghiului *ABC*.

a) Dacă în triunghiul isoscel *BAC* se cunoaște baza $BC = 36$ cm și latura $AC = 82$ cm, se cere să se calculeze înălțimea triunghiului dusă din vârful *A* pe baza *BC*.

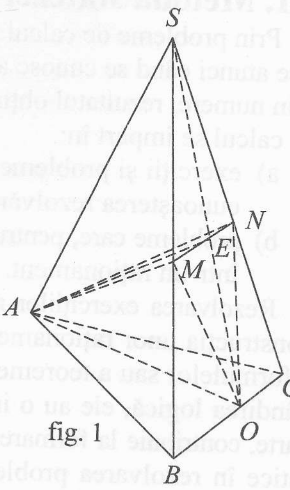

fig. 1

În triunghiul isoscel *ABC*, ducem înălțimea *AD*, și se formează două triunghiuri dreptunghice egale, în care cunoaștem ipotenuzele și câte o catetă, deci:

$AD^2 = AC^2 - DC^2$

$AD^2 = 82^2 - 18^2 = (82 + 18)(82 - 18) = 100 - 64$

$AD = \sqrt{100 \cdot 64} = 80$ cm.

Formulăm o altă problemă, a cărei întrebare trebuie să aibă în vedere răspunsul căutat la prima chestiune.

b) În triunghiul BAC se cunoaște baza $BC = 36$ cm și înălțimea $AD = 80$ cm. Să se afle aria triunghiului ABC.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{B \cdot \hat{I}}{2} = \frac{36 \cdot 80}{2} = 1440 \text{ cm}^2.$$

În cele ce urmează vom calcula aria triunghiului SAB, adică:

c) În triunghiul dreptunghic SAB se dă cateta $AB = 82$ cm și $AS = 40$ cm. Să se calculeze aria lui.

$$\mathcal{A}_{SAB} = \frac{AB \cdot AS}{2} = \frac{82 \cdot 20}{2} = 820 \text{ cm}^2.$$

Deoarece triunghiul dreptunghic SAC este congruent cu triunghiul dreptunghic SAB, cele două triunghiuri având catetele respectiv congruente, rezultă că aria triunghiului SAC este egală cu aria triunghiului SAB, deci: $\mathcal{A}_{SAC} = 820$ cm^2.

Pentru calcularea ariei triunghiului SBC ne trebuie înălțimea. Unim pe S cu D și observăm că segmentul de dreaptă SD este chiar înălțimea triunghiului SBC, adică $SD \perp BC$. Acest fapt se vede imediat aplicând teorema celor trei perpendiculare.

Într-adevăr, dreapta SA este perpendiculară pe planul bazei. Prin ipoteză, AD este perpendiculară pe BC ca înălțime în triunghiul isoscel ABC, deci $SD \perp BC$.

Pentru a calcula înălțimea SD, observăm că ea este ipotenuză în triunghiul dreptunghic SAD, în care catetele se cunosc.

d) În triunghiul dreptunghic SAD: $AD = 80$ cm; $SA = 20$ cm. Să se calculeze SD.

$SD^2 = AS^2 + AD^2$

$SD^2 = 20^2 + 80^2 = 400 + 1600 = 2000$

$SD = 20\sqrt{5}$ cm.

e) În triunghiul SBC se dă baza $BC = 36$ cm și înălțimea $SD = 20\sqrt{5}$ cm. Să se calculeze aria lui.

$$\mathcal{A}_{SBC} = \frac{BC \cdot SD}{2} = \frac{36 \cdot 20\sqrt{5}}{2} = 360\sqrt{5} \text{ cm}^2.$$

f) Așadar, în piramida $SABC$, ariile fețelor sunt: $\mathcal{A}_{SAB} = 820$ cm^2, $\mathcal{A}_{SAC} = 820$ cm^2, $\mathcal{A}_{SBC} = 360\sqrt{5}$ cm^2 și $\mathcal{A}_{ABC} = 1440$ cm^2.

Se cere să se calculeze aria totală.

$\mathcal{A} = 820 + 820 + 1440 + 360\sqrt{5} = 3080 + 360\sqrt{5}$ cm^2.

2°) Pentru a afla volumul piramidei $SABC$ formulăm următoarea problemă simplă.

g) În piramida $SABC$ se cunosc aria bazei egală cu 1440 cm^2 și înălțimea $SA = 20$ cm. Să se calculeze volumul ei.

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot \hat{I}}{3} = \frac{1440 \cdot 20}{3} = 9600 \text{ cm}^3.$$

3°) Secțiunea AMN este un triunghi. Pentru a afla aria lui ne trebuie baza și înălțimea dusă din vârful A pe baza MN.

h) Dacă în triunghiul SBC se dă $BC = 36$ cm, iar punctele M și N sunt mijloacele muchiilor SB și, respectiv, SC, calculăm lungimea segmentului MN astfel:

MN este linie mijlocie în triunghiul SBC, deci avem:

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}.$$

i) Deoarece intersecția diagonalelor paralelogramului $SMDN$ ($ND \parallel SM$, $MD \parallel SN$) este punctul E, rezultă că $ME = EN$.

Pe de altă parte, AE *este* înălțime în triunghiul AMN isoscel ($AM = AN$). Pentru a calcula lungimea segmentului AE, observăm că el este mediană în triunghiul dreptunghic SAD, deci:

$$AE = \frac{SD}{2} = \frac{20\sqrt{5}}{2} = 10\sqrt{5} \text{ cm}.$$

j) În triunghiul AMN cunoaștem lungimea bazei $MN = 18$ cm și înălțimea $AE = 10\sqrt{5}$ cm. Să se calculeze aria lui.

$$\mathcal{A}_{AMN} = \frac{MN \cdot AE}{2} = \frac{18 \cdot 10\sqrt{5}}{2} = 90\sqrt{5} \text{ cm}^2.$$

4^0) Unghiul pe care îl face fața SBC cu planul bazei ne este dat de unghiul plan al acestui diedru.

Doarece dreapta SD este perpendiculară pe BC și AD este perpendiculară pe BC, unghiul ADS este unghiul plan al diedrului dat.

Pentru a calcula tangenta acestui unghi vom aplica funcții trigonometrice în triunghiul dreptunghic SAD, deoarece avem $AD = 80$ cm și $AS = 20$ cm. Deci:

$$\text{tg}(\sphericalangle ADS) = \frac{AS}{AD} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}.$$

PROBLEMA 2

Un trunchi de con are generatoarea egală cu 25 cm, aria secțiunii medii egală cu 1190,25 π cm^2 și aria secțiunii axiale egală cu 1656 cm^2. Să se afle volumul trunchiului de con.

SOLUȚIE

Mai întâi construim figura.

Se cunosc: generatoarea $BC = 25$ cm; aria cercului egală cu 1190,25 π cm^2; aria trapezului isoscel $ABCD$ egală cu 1656 cm^2.

Se cere volumul trunchiului de con (fig. 2).

Pentru a găsi volumul trunchiului de con, vom calcula mărimile de care avem nevoie.

Cunoscând aria secțiunii medii, putem formula o problemă simplă, din care să aflăm raza acestei secțiuni astfel:

1. Aria cercului O este egală cu 1190,25 π cm^2. Care este raza lui?

$$\pi \cdot OH^2 = 1190{,}25\,\pi$$

$$OH = \sqrt{1190{,}25} = 34{,}5 \text{ cm}.$$

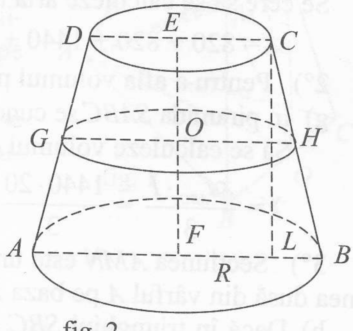

fig. 2

Raza cercului de centru O este linie mijlocie în trapezul $EFBC$. Prin urmare:

2. Cunoscând care este linia mijlocie a unui trapez, să se afle suma bazelor lui:

$$\frac{EC+FB}{2}=OH$$

Deoarece bazele trapezului $EFBC$ sunt razele cercurilor de bază ale trunchiului de con, urmează că avem:

$$r+R=2\cdot 34{,}5=69 \text{ cm}.$$

Astfel deducem că suma bazelor trapezului (secţiunii axiale) este:

$$DC+AB=2r+2R=138 \text{ cm}.$$

3. Folosind aria secţiunii axiale şi rezultatul de la punctul 2, putem calcula înălţimea trunchiului de con, formulând următoarea problemă simplă:

Aria unui trapez este egală cu 1656 cm^2 şi suma bazelor lui, 138 cm. Care este înălţimea trapezului?

$$\frac{DC+AB}{2}\cdot EF=1656$$

Înlocuind suma bazelor cu valoarea ei, avem:

$$\frac{138}{2}\cdot EF=1656; \qquad 69\cdot EF=1656; \qquad EF=\frac{1656}{69}=24 \text{ cm}.$$

Însă înălţimea trapezului $ABCD$ este şi înălţimea trunchiului de con, deci:

$EF = 24$ cm este înălţimea trunchiului de con.

Dacă din punctul C coborâm o perpendiculară pe bază, se obţine triunghiul dreptunghic BCL.

4. Dacă în triunghiul dreptunghic BCL se cunosc ipotenuza $BC = 25$ cm şi cateta $CL = 24$ cm, se cere să se afle cateta BL.

Folosind teorema lui Pitagora, avem:

$$BL^2=BC^2-CL^2 \qquad BL^2=25^2-24^2$$

$$BL^2=625-576=49 \qquad BL=\sqrt{49}=7 \text{ cm}$$

Însă BL reprezintă diferenţa razelor, deci: $R-r=7$.

5. Ştiind că suma razelor este egală cu 23 cm şi diferenţa lor egală cu 7 cm, să se afle razele.

$$R+r=23 \qquad R-r=7, \text{ de unde}$$

$$2R=30 \qquad R=15 \text{ cm} \qquad r=15-7=8 \text{ cm}$$

Putem acum calcula volumul trunchiului de con, formulând următoarea problemă:

6. Un trunchi de con are razele bazelor egale, respectiv cu 15 cm şi 8 cm, şi înălţimea cu 24 cm. Să se afle volumul lui. Pentru a calcula volumul trunchiului de con, aplicăm următoarea formulă:

$$\mathcal{V}_{\text{tr. de con}}=\frac{\pi\cdot \hat{I}}{3}(R^2+r^2+Rr), \text{ de unde:}$$

$$\mathcal{V}_{\text{tr. de con}}=\frac{\pi\cdot 24}{3}(225+64+120)=8\cdot 409\pi=3272\pi \text{ cm}^3.$$

1.2. Metoda sintezei în rezolvarea problemelor de demonstrație

În problemele de demonstrație se urmărește să se justifice dacă o afirmație pe care am formulat-o mai înainte, referitoare la o proprietate a unei figuri geometrice, este adevărată sau nu.

Într-o problemă de demonstrație la geometrie se consideră o figură despre care se spune că posedă proprietățile α și se cere să demonstrăm că posedă și proprietățile β.

Propoziția care ne spune că figura dată posedă proprietățile α poartă numele de ipoteză, iar propoziția care ne spune că figura dată posedă proprietățile β poartă numele de concluzie. Cu alte cuvinte, într-o problemă de demonstrație se cere să arătăm că, dacă pentru o figură este adevărată ipoteza, este adevărată și concluzia.

Pentru a înțelege mai bine demonstrațiile din următoarele exemple în care se arată cum se aplică metoda sintezei în rezolvarea problemelor de demonstrație, amintim pe scurt câteva chestiuni din geometrie privind *orientarea segmentelor*, precum și noțiuni legate de *transversale* (chestiunile legate de orientarea segmentelor urmează să fie detaliate în una dintre metodele particulare de rezolvare a problemelor de geometrie, și anume în metoda vectorială din capitolul II, secțiunea 6).

Segmente orientate

Lungimea unui segment AB poate fi parcursă de un mobil plecând fie de la A înspre B, fie de la B spre A (fig. 3).

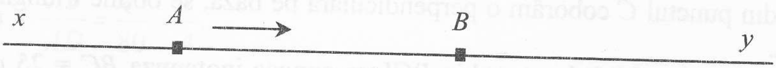

fig. 3

Și într-un caz și în celălalt, mobilul a străbătut aceeași distanță, însă, deoarece mișcarea s-a făcut într-un sens și a doua oară în alt sens, s-a convenit să se considere segmentul parcurs de la stânga spre dreapta, pozitiv și cel parcurs de la dreapta spre stânga, negativ.

Atunci, dacă notăm lungimea segmentului AB cu x, avem: $AB = +x$ și: $BA = -x$, de unde: $AB + BA = 0$. Segmentele de acest fel se numesc segmente orientate. Pentru a deosebi segmentele orientate de cele neorientate, vom folosi următoarea notație: segmentele orientate le vom scrie cu o liniuță deasupra, cele neorientate fără liniuță, de exemplu: $\overline{AB}$ segment orientat; AB segment neorientat.

Semnele rapoartelor

Dacă A, B, C sunt trei puncte luate pe axa xy (fig. 4), atunci se formează segmentele: AB, BC, AC. Raportul a două segmente este considerat pozitiv dacă amândouă sunt luate în același sens, de exemplu: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = u$ sau $\frac{\overline{BA}}{\overline{CB}} = u$, $u > 0$, și negativ când segmentele nu sunt orientate la fel, de exemplu: $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = -u$ sau $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = -q$.

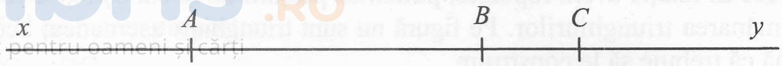

fig. 4

Transversale

Orice dreaptă care intersectează toate laturile unui triunghi, considerând şi prelungirile lor, se numeşte *transversală*. Cele trei puncte de intersecţie ale transversalei cu laturile triunghiului pot fi considerate ca originea segmentelor ale căror extremităţi sunt vârfurile triunghiului situate pe aceeaşi latură.

O transversală intersectează interior două din laturile unui triunghi şi una în prelungire. Dacă transversala intersectează interior două din laturile unui triunghi şi una în prelungire, atunci două rapoarte sunt negative şi unul pozitiv, deci produsul celor trei rapoarte *este totdeauna pozitiv.*

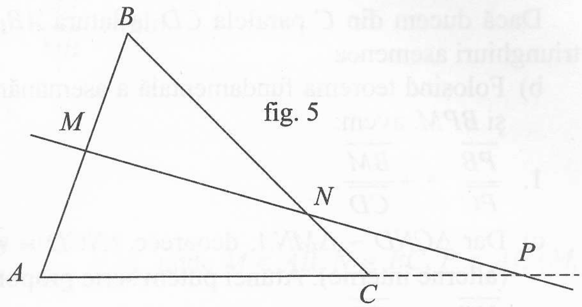

fig. 5

Rapoartele $\frac{\overline{NC}}{\overline{NB}}$ şi $\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$ sunt negative, iar raportul $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$ este pozitiv, deci şi produsul lor este pozitiv (fig. 5).

Dacă *transversala intersectează prelungirile laturilor unui triunghi, atunci toate rapoartele sunt pozitive:* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}, \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}, \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}$ (fig. 6).

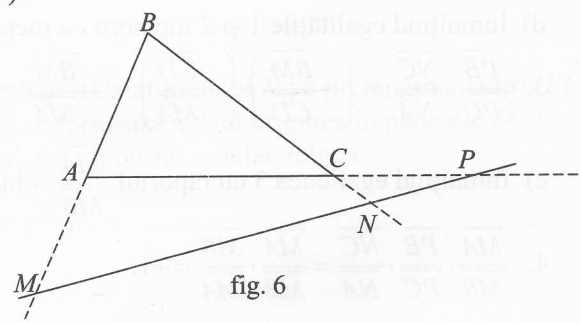

fig.6

Produsul rapoartelor formate din segmente care au aceeaşi orientare va fi pozitiv.

PROBLEMA 1

Fie ΔABC. Orice transversală a triunghiului determină pe laturile lui trei puncte care le împart în rapoarte al căror produs este $+1$. (*Teorema lui Menelaus*)

SOLUŢIE

Cazul I

Dacă M, N, P sunt punctele unde transversala intersectează laturile ΔABC, atunci trebuie să arătăm că: $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = +1.$

a) Deoarece în relație avem rapoarte, putem să plecăm de la cunoștințele referitoare la asemănarea triunghiurilor. Pe figură nu sunt triunghiuri asemenea; aceasta înseamnă că trebuie să le construim.

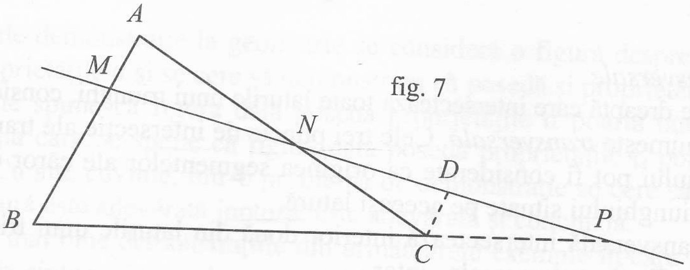

fig. 7

Dacă ducem din C paralela CD la latura AB, observăm că s-au format mai multe triunghiuri asemenea.

b) Folosind teorema fundamentală a asemănării pentru triunghiurile asemenea PCD și BPM, avem:

1. $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = +\frac{\overline{BM}}{\overline{CD}}$.

c) Dar $\Delta CND \sim \Delta MNA$, deoarece $\sphericalangle NCD \equiv \sphericalangle A$ (alterne interne); $\sphericalangle NDC \equiv \sphericalangle AMN$ (alterne interne). Atunci putem scrie proporționalitatea laturilor:

2. $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -\frac{\overline{CD}}{\overline{MA}}$.

d) Înmulțind egalitățile 1 și 2 membru cu membru, obținem:

3. $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \left(+\frac{\overline{BM}}{\overline{CD}}\right) \cdot \left(-\frac{\overline{CD}}{\overline{MA}}\right) = -\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$.

e) Înmulțind egalitatea 3 cu raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, obținem:

4. $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = +1$.

Cazul II

Demonstrăm asemănător și în cazul când transversala intersectează prelungirile laturilor triunghiului dat.

Deci, fie triunghiul ABC și o transversală oarecare care determină pe prelungirile laturilor punctele M, N, P (fig. 8).

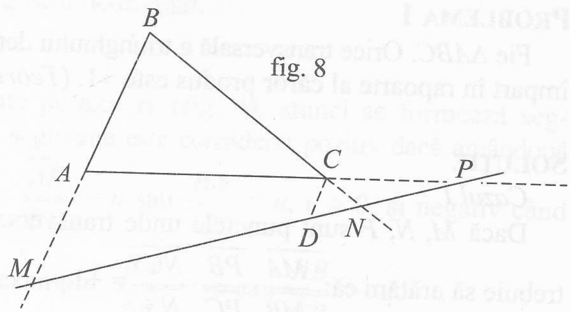

fig. 8

Să arătam că: $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = +1$.

Folosim din nou cunoștințele de la triunghiuri asemenea.